[PK]. Montrer que les points G,H et J sont alignés.

PROBLEME

I/ Soit $f : IR \to IR; x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. (C) désigne la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ Montrer que (C) possède un point d'inflexion dont on précisera. Tracer la courbe(C) .

3/a- Montrer que f est une bijection de IR dans un intervalle J à préciser

b- Soit g la bijection réciproque de f et (C′) sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

Montrer que $\forall x \in J; g(x) = \dfrac{1}{2}\text{Log}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$.

II/

1/ Soit $\varphi : IR \to IR; x \mapsto \varphi(x)=f(x)-x$. Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et que $\text{Log}2 < \alpha < 1$.

2/ On pose $I = \dfrac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} \text{Log}\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)dx$.

a- En utilisant une intégration par parties ,calculer I(on remarquera que $\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$).

b- En déduire en fonction de α, l'aire de la partie (K) du plan limitée par les courbes (C) et (C′) et les deux axes **de coordonnées**.

3/ On définie la suite (u_n) par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in IN$.

a- Montrer que $\forall n \in IN; 0 \le u_n < \alpha$.

b- Etudier le sens de variations de (u_n). En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

c- On définie la suite (v_n) par $v_n=\dfrac{1}{\alpha-u_n}\int_{u_n}^{\alpha} f(x)dx; \forall n \in IN$.

Montrer que $u_{n+1} \le v_n \le \alpha; \forall n \in IN$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

III/ Soit F la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$F(0) = -\text{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$ et $\forall x \neq 0; F(x)=\int_0^{\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)} f(t)dt$.

1/a- Etudier la parité de F.

b- Montrer que F est dérivable sur $]0;1[$ et calculer $F'(x)$.

2/a- Calculer $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En déduire l'expression de F(x) sur $]0;1[$.